2022-03-23 Secondo Compitino Analisi 2

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**claudio.saccon@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Istruzioni di compilazione: Si usi:
· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere ^ per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 15 minuti)

Cognome

xxxx

Nome

yyyy

Matricola

123456

Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$f(x,y) := x + \sqrt{3}y$$
$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\right\}$$

4 punti

(a) Si calcoli $\max_D f$;

2 2

4 punti

(b) Si calcoli $\min_D f$.

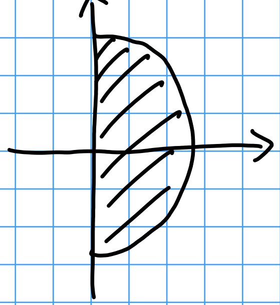
-Sqrt(3) $-\sqrt{3}$

Esercizio Due

Si consideri l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ definito da:

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right\}.$$

ES. UNO



$D = \{ G_1 \leq 0 , G_2 \leq 0 \}$

$G_1 = x^2 + y^2 - 1 \qquad G_2 = -x$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

PTI CRITICI : (1) SU $\{ G_1 < 0 , G_2 < 0 \}$ $\quad \nabla f = 0$ IMPOSSIBILE

(2) SU $\{ G_1 = 0 , G_2 < 0 \}$ $\quad \nabla f = \lambda \nabla G_1$ cioè

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ \sqrt{3} = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \quad x > 0 \end{cases} \qquad \lambda = \frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2y} \Rightarrow y = \sqrt{3} x \Rightarrow x^2 + 3x^2 = 1$$

$= x = \pm \frac{1}{2}$

(MA $x > 0$)

$\Rightarrow$ TROVO $\left(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$f\left(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

(3) SU $\{ G_1 < 0 , G_2 = 0 \}$ $\quad \nabla f = \lambda \nabla G_2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ IMPOSSIBILE

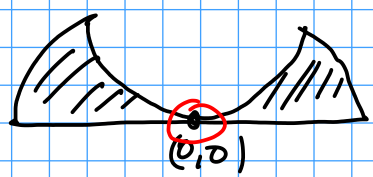
(4) SU $\{ G_1 = G_2 = 0 \}$ ho i due punti $(0, \pm 1)$ su cui

$f(0, \pm 1) = \pm \sqrt{3}$

Dato che $\quad -\sqrt{3} < \sqrt{3} < 2$

DUE (a) D è chiuso (tutte dis. deboli ...)

(b) $(0,0) \in \partial D$ perché



$\partial D = \{ x^2 + y^2 = 1 , 0 \leq y \leq x^2 \} \cup \{ x^2 \leq 1 , y = 0 \} \cup \{ x^2 + y^2 \leq 1 , 0 \leq y = x^2 \}$

(c), (d) $\quad D = \{ G_1 \leq 0 , G_2 \leq 0 \quad G_3 \leq 0 \}$ dove

$G_1 = x^2 + y^2 - 1$

$G_2 = -y$

$G_3 = y - x^2$

Nel punto $(0,0)$

$$\underbrace{\nabla G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{SONO LINEARMENTE DIPENDENTI}}$$

1 punto

(a) Si dica se D è chiuso;

- [x] Sì
- [ ] No

1 punto

(b) Si dica se il punto $(0,0)$ appartiene a ∂D;

- [x] Sì
- [ ] No

2 punti

(c) Si dica se D è un dominio regolare;

- [ ] Sì
- [x] No

2 punti

(d) Si giustifichi la risposta data al precedente punto (c).

in (0,0) i due vincoli y=0 e y=x^2 hanno normali parallele

Esercizio Tre

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \qquad P_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ \frac{1}{2} \right)$$

TRE (a) $f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

(b)(c) Si chiede se esiste $g = f^{-1}$. Per il teorema di inversione locale basta sapere che $\det(J_f(P_0)) \neq 0$.

Allora $J_f = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$ $J_f(P_0) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

che ha $\det = 3 + 1 = 4 \neq 0$.

(d)(e)

Sempre per il teorema di inversione locale

$$J_g(Q_0) = J_f(P_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \frac{\partial g_1}{\partial u} = \sqrt{3}/4 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial v} = 1/4$$

QUATTRO Si ha:

$$\iint_D |f| = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \left| \frac{\rho\cos\theta \ \rho\sin\theta}{\rho^4} \right| \rho \, d\rho =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\sin 2\theta| \, d\theta}_{>0} \ \underbrace{\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho}}_{= +\infty}$$

DUNQUE $|f|$ non è integrabile e per definizione f non è integrabile

IN OGNI CASO $|f| \geq 0 \Rightarrow |f|$ HA INTEGRALE $(+\infty)$

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Si consideri inoltre il punto $P_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1 punto

(a) Si trovi il punto $Q_0 := f(P_0)$;

(1/2,Sqrt(3)/2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2 punti

(b) Si dica se esiste una funzione $g = g(u, v)$ definita in un intorno W di Q_0 tale che $f(g(u, v)) = (u, v)$, per le (u, v) che appartengono a W;

- (●) Sì
- ( ) No

2 punti

(c) Si giustifichi la risposta data al precedente punto (b);

La matrice jacobiana di f in P0 ha determinante diverso da zero. Per il teorema di inversione locale si può invertire f in un intorno di P0 e definire g (come detto sopra) in un intorno di Q0.

4 punti

(d) Si calcoli la derivata partiale $\frac{\partial g_1}{\partial u}(Q_0)$ – se esiste, in caso contrario si scriva "non esiste";

~~sqrt(3)/2~~ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

4 punti

(e) Si calcoli la derivata partiale $\frac{\partial g_1}{\partial v}(Q_0)$ – se esiste, in caso contrario si scriva "non esiste".

~~1/2~~ $\frac{1}{4}$

Esercizio Quattro

Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y)(0,0). \end{cases}$$

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

1 punto

(a) $|f|$ ammette integrale su D;

- (●) Sì
- ( ) No

1 punto

(b) $|f|$ è integrabile su D;

- [ ] Sì
- [x] No

1 punto

(c) f ammette integrale su D;

- [ ] Sì
- [x] No

1 punto

(d) f è integrabile su D;

- [ ] Sì
- [x] No

1 punto

(e)

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = 0.$$

- ◯ Sì
- ◉ No

Esercizio Cinque

Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ e l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$f(x,y) = \frac{1}{xy}$$

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^3 \le y \le 2x^3, y^3 \le x \le 2y^3\}$$

8 punti

(a) Si calcoli $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

(1/8)(ln(2))^2

$\frac{1}{8} \ln(2)^2 = \frac{1}{8} \ln^2(2)$

Questo modulo è stato creato all'interno di Università di Pisa.

Google Moduli

Poniamo $u = \frac{y}{x^3}$ $\quad v = \frac{x}{y^3}$. TROVIAMO LA FUNZIONE INVERSA $(x,y) = \phi(u,v)$. Dobbiamo risolvere in x, y il sistema

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^3} \\ v = \frac{x}{y^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = u x^3 \\ x = v y^3 \end{cases} \Rightarrow y = u (v y^3)^3 = u v^3 y^9 \quad \text{dato che } y > 0$$

$$1 = u v^3 y^8 \Rightarrow y = u^{-\frac{1}{8}} v^{-\frac{3}{8}}$$

$$x = v \left(u^{-\frac{1}{8}} v^{-\frac{3}{8}}\right)^3 = v\, u^{-\frac{3}{8}} v^{-\frac{9}{8}} = u^{-\frac{3}{8}} v^{-\frac{1}{8}}$$

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u^{-\frac{1}{8}} v^{-\frac{3}{8}} \\ u^{-\frac{3}{8}} v^{-\frac{1}{8}} \end{pmatrix} \Rightarrow J_\phi(u,v) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} u^{-\frac{9}{8}} v^{-\frac{3}{8}} & -\frac{3}{8} u^{-\frac{1}{8}} v^{-\frac{11}{8}} \\ -\frac{3}{8} u^{-\frac{11}{8}} v^{-\frac{1}{8}} & -\frac{1}{8} u^{-\frac{3}{8}} v^{-\frac{9}{8}} \end{bmatrix}$$

$$\det J_\phi(u,v) = \frac{1}{64} u^{-\frac{12}{8}} v^{-\frac{12}{8}} - \frac{9}{64} u^{-\frac{12}{8}} v^{-\frac{12}{8}}$$

$$|\det J_\phi(u,v)| = \frac{1}{8} u^{-\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}}$$

USANDO IL CAMBIO DI VAR.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2\int_1^2 \underbrace{u^{\frac{1}{8}} v^{\frac{3}{8}}}_{\frac{1}{x}} \underbrace{u^{\frac{3}{8}} v^{\frac{1}{8}}}_{\frac{1}{y}} \frac{1}{8} u^{-\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}}\,du\,dv = \frac{1}{8}\left(\int_1^2 u^{-1}\,du\right)\left(\int_1^2 v^{-1}\,dv\right)$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\ln(u)\Big]_1^2 \Big[\ln(v)\Big]_1^2 = \frac{1}{8} \ln(2)^2$$